Prof. Dr. Alfred Toth

Zeichen als Wurzeln komplexer Zahlen V

1. In den Teilen I-IV (Toth 2011a-d) hatten wir aufgezeigt, dass man, kurz gesagt, das Zeichen als komplexe Zahl definieren kann. Damit ist klar, dass sich das Zeichen aus einem Real- und einem Imaginärteil zusammensetzt. Es lässt sich somit im Sinne Benses als Funktion über einer reellen und einer imaginären Domäne definieren

$Z = f(\mathbb{R}, \mathbb{I})$,

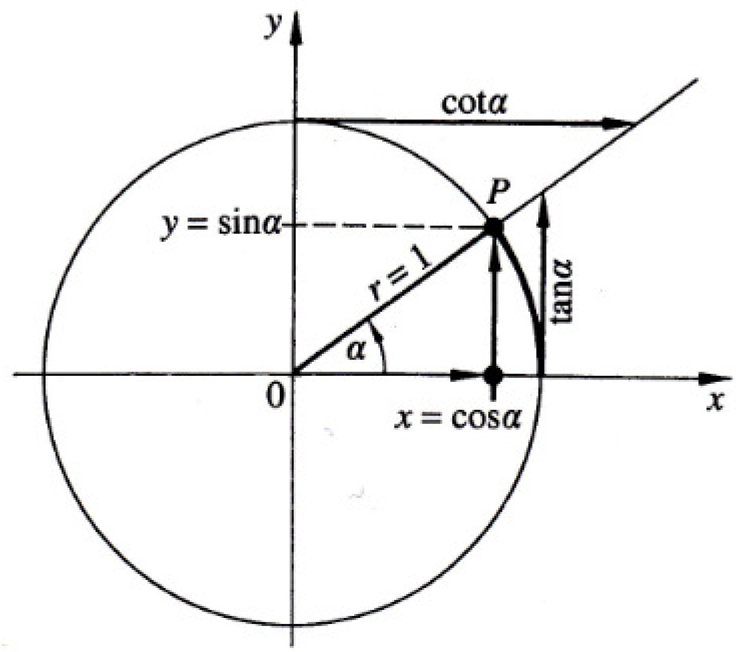
wobei $\mathbb{R}$ = Welt und $\mathbb{I}$ = Bewusstsein ist („dass die Semiotik ... die Disjunktion zwischen Welt und Bewusstsein in der prinzipiellen Frage nach der Erkennbarkeit der Dinge oder Sachverhalte zu thematisieren vermag", Bense 1975, S. 16), d.h. es ist genauer

$Z = f(x, y)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{I}$.

Eine alternative Konzeption, vorgeschlagen von Bense (1976, S. 60) und (1981, S. 77), besteht darin, dass man $\mathbb{R}$ = Ontizität und $\mathbb{I}$ = Semiotizität setzt.

2. Trigonometrische Funktionen

Stellt man komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlebene mittels des Einheitskreises dar, auf dem die komplexen Einheitswurzeln liegen, so entspricht also die Abszisse dem Bereich der „Weltobjekte" und die Ordinate dem Bereich des „Bewusstseins" (das folgende Bild stammt aus Kemnitz 1998, S. 223):



Dann ergibt sich für die Kreisfunktionen:

Sinus:	$\sin\alpha = y$
Kosinus:	$\cos\alpha = x$
Tangens:	$\tan\alpha = \frac{y}{x}$
Kotangens:	$\cot\alpha = \frac{x}{y}$

Sie lassen sich nach dem vorher Gesagten semiotisch durch die folgenden 4 Relationen von Welt- und Bewusstseinsachse auzsdrücken:

Sinus	Bewusstsein	Z = f(y)
Kosinus	Welt	Z = f(x)
Tangens	Bewusstein / Welt	Z = f<y, x>
Kotangens	Welt / Bewusstsein	Z = f<x, y>

Z = f(y) wäre ein Zeichen, das nur Bewusstseinszeichen ist, also etwa ein „Gedankenzeichen“. Z = f(x) wäre das Zeichen, das nur Weltzeichen ist, d.h.

ein rein ontologisches Gebilde, und es würde damit wohl mit dem Objekt zusammenfallen. Während Z = f<x, y>, also der Kotangens, das Zeichen als Zeichenthematik ist, ist der Tangens Z = f<y, x> das Zeichen als Realitätsthematik, also wird dadurch die Primordialität der vermittelten Realität vor dem vermittelten Zeichen behauptet. In der semiotischen Praxis wird oft genau so verfahren, wenn nämlich ein Objekt mit Hilfe der von den Realitätsthematiken präsentierten strukturellen (entitätischen) Realitäten zum Zeichen erklärt wird.

3. Arcus-Funktionen (inverse trigonometrische Funktionen)

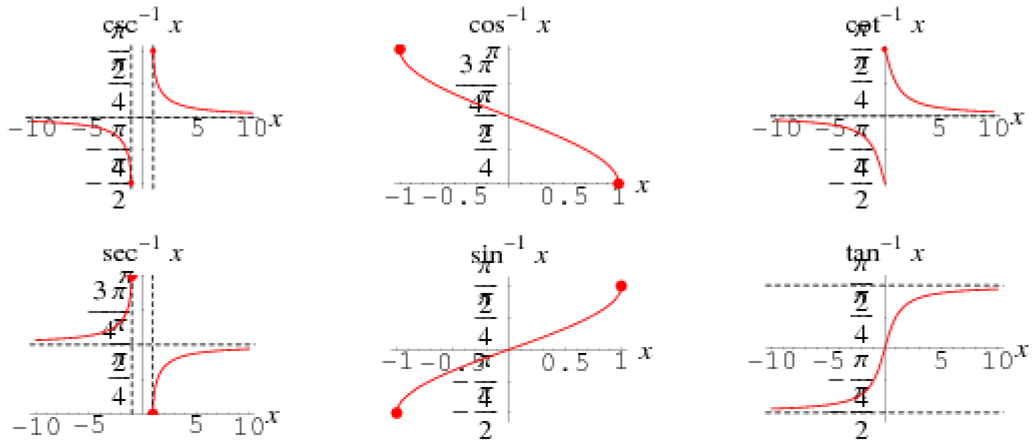
Die Arcusfunktionen beruhen auf der Vertauschung von Domäne und Codomäne der trigonometrischen Funktion, d.h. es ist z.B.

sin x = y → arcsin y = x,

wobei die Domänen und Codomänen wie folgt definiert sind (Tabelle aus Weißstein, MathWorld):

function name	function	domain	range
inverse cosecant	$\csc^{-1} x$	$(-\infty, \infty)$	$\left[-\frac{1}{2}\pi, 0\right)$ or $\left(0, \frac{1}{2}\pi\right]$
inverse cosine	$\cos^{-1} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
inverse cotangent	$\cot^{-1} x$	$(-\infty, \infty)$	$\left(-\frac{1}{2}\pi, 0\right)$ or $\left(0, \frac{1}{2}\pi\right]$
inverse secant	$\sec^{-1} x$	$(-\infty, \infty)$	$\left[0, \frac{1}{2}\pi\right)$ or $\left(\frac{1}{2}\pi, \pi\right]$
inverse sine	$\sin^{-1} x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$
inverse tangent	$\tan^{-1} x$	$(-\infty, \infty)$	$\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$

Ihre Funktionsgraphen sehen also wie folgt aus:



y = arccosec x ist als Zeichenfunktion nur im semiotischen und meontischen (vgl. Toth 2006, S. 52 ff.) Bereich definiert. Während aber die beiden hyperbeläste asymptotisch zur reellen Achse sind, sind sie nicht zur imaginären Achse, sondern zu x = ±1 asymptotisch, d.h. sie sind zur Weltachse (ω), aber nicht zur Bewusstseinsachse (β), sondern zur Achse der Semiotizität (s) asymptotisch:

Z = f(x, s).

Für y = arcsec x gilt das oben Gesagte mit der Einschränkung, dass sie als Zeichenfunktion nur im idealistischen und materialistischen Bereich definiert ist (vgl. Toth 2006, S. 53).

Während y = arcsin x nur im semiotischen und im idealistischen Quadranten definiert ist, ist und y = arccos x nur im meontischen und materialistischen Quadranten definiert. Beide Funktionen verbinden jeweils die höchste Weltstufe mit der höchsten Bewusstseinsstufe und vice versa.

Dagegen sind y = arctan x und y = arcctan x beide auf den semiotischen und den materialistischen Bereich beschränkt und beide sowohl zur Welt- als auch zur Bewusstseinsachse asymptotisch, d.h. für beide Funktionen gilt:

Z = f(x, y).

Es gibt somit keine Arcusfunktion, die zur Achse der Ontizät asymptotisch, vgl. jedoch ausführlich Toth 2002 und den nächsten Abschn.

4. Hyperbelfunktionen

Bekanntlich stellt die Eulersche Formel einen Zusammenhang her zwischen trigonometrischen Funktionen und komplexen Zahlen, denn es gilt

$$\boxed{e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C}}$$

oder, nach z aufgelöst:

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}}$$

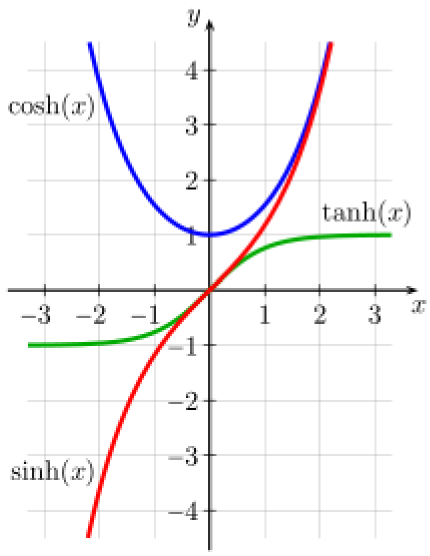
Diese Formel wird nun benutzt, um die hyperbolischen Funktionen zu definieren. Es sind

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

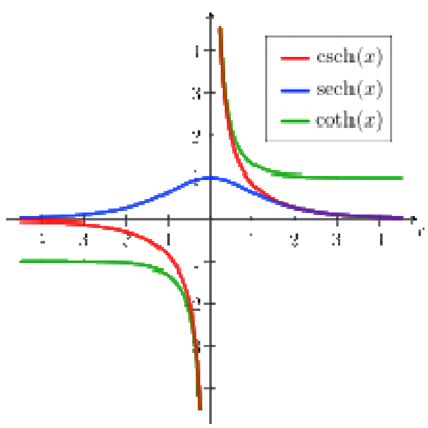
Während jedoch die Funktionen y = sinh x und y = cosh x für alle komplexen Zahlen (und damit für alle Zeichen) definiert sind, da sie holomorph sind, haben die übrigen Hyperbelfunktionen auf der imaginären Achse (Achse des Bewusstseins) Pole:

- Tangens Hyperbolicus $\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$
- Cotangens Hyperbolicus $\coth(x) := \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$
- Secans Hyperbolicus $\operatorname{sech}(x) := \frac{1}{\cosh(x)}$
- Cosecans Hyperbolicus $\operatorname{csch}(x) := \frac{1}{\sinh(x)}$

Vgl. die Funktionsverläufe von y = sinh x, y = cosh x und y = tanh x (entnommen aus Wikipedia)



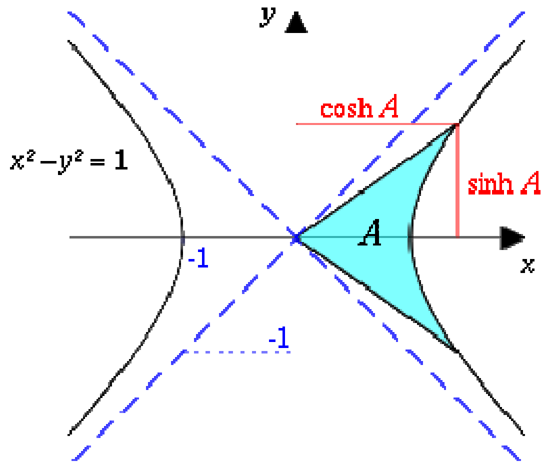
sowie von y = cotan x, y = sech x und y = csech x



Die Zeichenfunktion Z = f(x, s) entspricht, wie oben festgestellt, den Arkusfunktionen y = arcsec x, y = arccosec x. Nun entspricht die Hyperbelfunktion y = cotanh x der Zeichenfunktion Z = f(o, y), wenn o =: y = 1 die Domäne der Ontizität anstatt der Weltobjekte definiert. Für Z = f(x, s) gilt also, dass dieses Zeichen in der Ontologie verankert ist, semiotisch aber nur die Repräsentation, nicht die Präsentation des Bewusstseins erreicht. Dagegen gilt für die komplementäre Funktion Z = f(o, y), dass dieses Zeichen in der Semiotik verankert, ontologisch aber nur die Repräsentation, nicht die Präsentation der Welt erreicht. Unter Benutzung der von Max Bense (1975, S. 65 f.) eingeführten Terminologie kann man also auch sagen: Während Z = f(x, s) im ontologischen und semiotischen Raum verankert ist, ist Z = f(o, y) im ontologischen und semiotischen Raum verankert. Mit Hilfe dieser beiden Zeichenfunktionen kann man also die Geordnetheit der Argumente, d.h. der Domänen, und mit ihnen die Primordialität der Objektwelt vor der Zeichenwelt bzw. umgekehrt definieren.

(Die Diskussion der semiotischen Relevanz der übrigen Hyperbelfunktionen muss auf spätere Arbeiten verschoben werden.)

Wie das folgende Bild (aus Weißstein) zeigt



ist wegen y = x := (3.3 2.2 1.1 × 1.1 2.2 3.3) (vgl. Toth 2006, S. 56) y = cosh x gleich dem orthogonalen Abstand von der Kategorienklasse zur Bewusstseinsachse und y = sinh x gleich dem orthogonalen Abstand von der Kategorienklasse zur Weltachse. Auf diese Weise kann man also „Zellen“ von Zeichenräumen als Funktion des ontologischen und des semiotischen Raumes (Bense 1975, S. 65 f.) bequem definieren.

5. Area-Funktionen (inverse hyperbolische Funktionen)

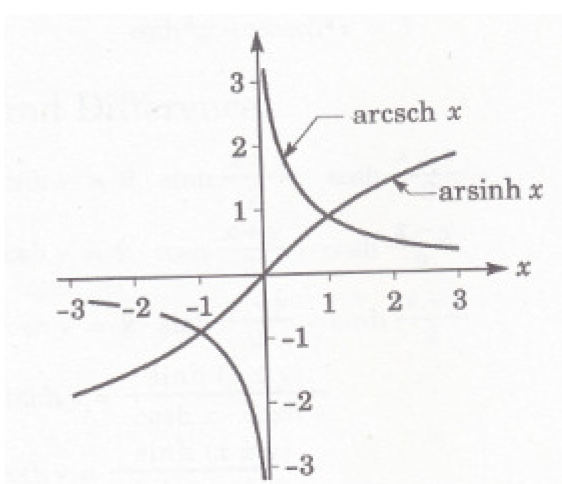
Wie die Arcusfunktionen die Inversen der trigonometrischen Funktionen sind, so sind die Areafunktionen die Inversen der hyperbolischen Funktionen. Da nach dem Satz von Euler ein Zusammenhang zwischen trigonometrischen und exponentiellen Funktionen besteht, folgt, dass auch einen Zusammenhang zwischen hyperbolischen Funktion und Arcusfunktionen geben muss. Dieser wird für die drei basalen Areafunktionen wie folgt definiert:

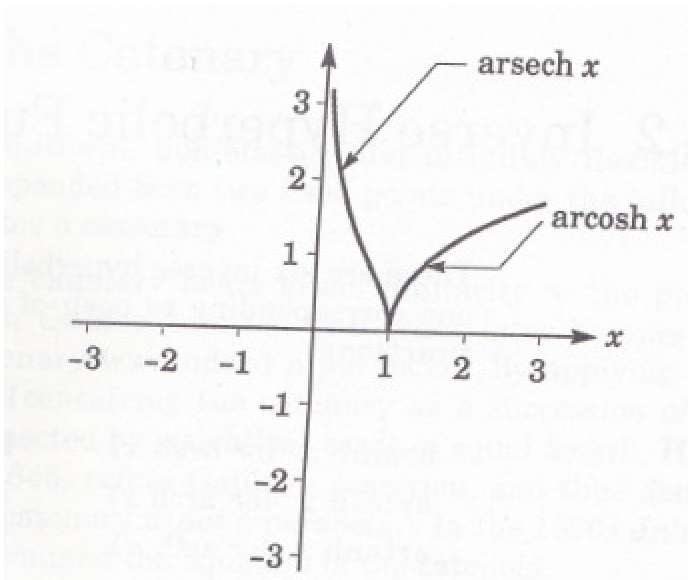
$$\sinh^{-1} z = -i \operatorname{arc} \sin iz,$$
$$\cosh^{-1} z = i \operatorname{arc} \cos z,$$
$$\tanh^{-1} z = -i \operatorname{arc} \tan iz\,.$$

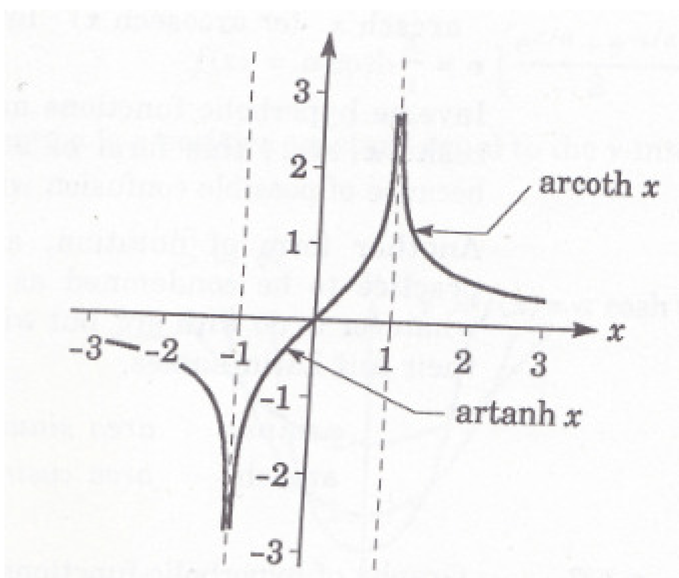
Man kann sie jedoch auch direkt mit dem Logarithmus zur Basis e, d.h. dem natürlichen Logarithmus, definieren:

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad -\infty < x < +\infty\,,$$
$$\cosh^{-1} x = \pm \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \qquad x \geq 1,$$
$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \qquad |x| < 1\,.$$

Die Funktionsverläufe für alle 6 Areafunktionen sind Gullberg (1997, S. 539 f.) entnommen:







Wenn wir uns auch bei den Areafunktionen, wie bereits bei den Arcusfunktionen, vorerst auf die unmittelbar einsichtigen semiotischen Folgerungen beschränken, so stellen wir fest, dass y = arcosech x sowohl zur Welt- als auch zur Bewusstseinsachse asymptotisch sind, auch wenn die Asymptose zur Weltachse langsamer verläuft als diejenige zur Bewusstseinsachse. Vielleicht darf man daraus eine höhere „Bewusstseinshaftigkeit" und daher eine geringere „Objekthaltigkeit" schliessen. Von besonderem semiotischem Interesse ist nun abe y = artanh x, denn sie ist asymptotisch zu y = ±1 und daher nicht nur semiotisch, sondern auch meontisch asymptotisch zur Achse der Semiotiztiät und nicht des Bewusstseins, d.h. zum repräsentierten, nicht aber zum präsentierten Bewusstsein. Ferner schneidet ihre Funktion wegen $y(x) = 0$ die Kategorienklasse (3.3 2.2 1.1 × 1.1 2.2 3.3), welche, wie oben bereits angedeutet, die Hauptverbindung zwischen dem semiotischen und dem meontischen Quadranten ist.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Vermittlung der Realitäten. Baden-Baden 1976

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Gullberg, Jan, Mathematics: From the Birth of Numbers. New York 1997

Kemnitz, Arnfried, Mathematik zum Studienbeginn. Brauschweig 1997

Toth, Alfred, Semiotische Hyperbelfunktionen. In: Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft 43/1, 2002, S. 15-19

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2006, 2. Aufl. 2008

Toth, Alfred, Zeichen als Wurzeln komplexer Zahlen. Teile I-IV. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011a-d

23.6.2011